TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

Un sistema di equazioni lineari, o sistema lineare, è un problema nel quale stabilire se esistono numeri Reali ($\mathbb{R}$) o Complessi ($\mathbb{C}$), $x_1, x_2, \dots, x_n$ che verificano contemporaneamente tutte le equazioni di I grado nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} = b_m \end{cases}$$

se $(m=n)$ numero di equazioni uguale numero incognite (sist. quadrato)

$(m \neq n)$ numero di equazioni maggiore numero incognite (sist. sovradeterminato)

a_{ij} = numero reale o complesso, che rappresenta il coefficiente dell'incognita x_j nell'equazione i-esima.
i = indice di riga, che varia da 1 a m
j = indice di colonna, che varia da 1 a n.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

NOTAZIONE COMPATTA

x_1	x_2	$\dots$	x_n	b_i
a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Si potrebbe togliere i nomi delle incognite, che però risultano fondamentali nel caso si effettuano scambi di colonne

L'algoritmo di Gauss usa 3 tipi di trasformazioni elementari:

- scambi di righe
- scambi di colonne
- moltiplicare una riga per un $\alpha \neq 0$ ($\in \mathbb{R}$)
- sostituire ad una riga la sua somma con un multiplo di un'altra.

Le trasformazioni servono a semplificare i sistemi, e vengono effettuate lavorando sui coefficienti del sistema.

Scambio di Righe nel quadro dei coefficienti
Equivale a cambiare di posto 2 equazioni nel sistema; una qualunque soluzione di uno qualunque dei 2 sistemi è tale se verifica tutte le due equazioni, indipendentemente dall'ordine con il quale sono elencate, e sono dunque soluzioni anche dell'altro sistema

Scambio di colonne nel quadro dei coefficienti
Equivale a scambiare i nomi delle corrispondenti incognite; purché si ricordi di averlo fatto, nulla cambia.
Due sistemi con le colonne scambiate non sono equivalenti (stesse soluzioni) a rigor di termine, ma si ricava le soluzioni dell'uno da quelle dell'altro riordinando i valori, tenendo traccia degli scambi.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = b \\ 0x + 1y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{array}$$

e' "equivalente" a: $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = a \\ 0x + 1y = b \end{cases} \rightarrow \begin{array}{cc|c} y & x & \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & a \end{array}$

dove le prime 2 colonne sono state scambiate, a patto di non dimenticare che, per ottenere dalle soluzioni di questo sistema ($x=a, y=b$) quelle del sistema dato occorre scambiare il valore di x con quello della y ottenendo quindi $x=b$, $y=a$.

"Addizione, sottrazione" e prodotto per uno scalare α.

Supponiamo che:

$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ siano soluzioni del sistema dato

Se moltiplichiamo un'equazione per un $\alpha \neq 0$, $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ sono ancora soluzioni del sistema dato.

Se poi sommiamo questa equazione, membro a membro ad un'altra $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ sono ancora soluzioni del sistema dato

Moltiplicando la prima equazione presa per $-\alpha$ e sommandola alla seconda si torna al sistema di partenza.

Se $\alpha = 0$ allora il sistema resta identico al precedente.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & b_i \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & b_i \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+\alpha a_{11} & a_{m2}+\alpha a_{12} & \dots & a_{mn}+\alpha a_{1n} & b_m \end{array}$$

ad esempio abbiamo sommato all'ultima riga un multiplo della prima riga

Riassumendo:

- Un sistema lineare si trasforma in uno equivalente se si scambiano 2 righe qualunque e sostituendo ad una sua qualunque la sua somma con un multiplo arbitrario di un'altra.
- Se in un sistema lineare si scambiano 2 colonne, si ottiene un sistema le cui eventuali soluzioni differiscono da quelle del sistema dato, solo per lo scambio delle incognite corrispondenti alle colonne scambiate.

Classificazione di un sistema in base al numero di soluzioni:

- DETERMINATO: 1 soluzione
- INDETERMINATO: ∞ soluzioni
- IMPOSSIBILE: 0 soluzioni

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Se ho tutta una riga di coefficienti nulla, si deve guardare il corrispondente termine noto:
- se anch'esso risulta nullo, l'equazione corrispondente a quella riga può essere non presa in considerazione
- se risulta non nullo, l'equazione corrispondente è impossibile e quindi anche il sistema

Se una colonna di coefficienti è nulla, posso risolvere il sistema, indipendentemente dal valore che essa assume, escludendo quella colonna; in fondo alla risoluzione devo re-interemettere la variabile con valore arbitrario t, nell'insieme delle soluzioni. Ottengo così infinite soluzioni al variare del parametro t.

NOTAZIONE VETTORIALE

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\dots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

scrivo il sistema come combinazione lineare di vettori, cioè come somma di multipli di vettori.

SISTEMI "ELEMENTARMENTE" RISOLUBILI

Un sistema lineare è risolto quando in ogni equazione appare solo un'incognita con coefficiente 1 e gli altri a 0; ma è troppo lontano dalle applicazioni pratiche

x_1	x_2	$\dots$	x_n	
1	0	$\dots$	0	k_1
0	1	$\dots$	0	k_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	k_n

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

SISTEMI DIAGONALI O DISACCOPPIATI

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\lambda_i \neq 0,\ i = 1,\dots,n$
λ_1	0	$\dots$	0	k_1
0	λ_2	$\dots$	0	k_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	λ_n	k_n

$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 x_1 = k_1 \\ \lambda_2 x_2 = k_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n = k_n \end{cases}$

si chiamano sistemi diagonali perché hanno tutta la diagonale principale $\neq 0$ e gli altri coefficienti nulli

si dicono disaccoppiati perché ogni equazione contiene solo un'incognita e non esprime legami di tale incognita con le altre.

Hanno soluzione unica se tutti i coefficienti della diagonale sono non nulli.

Se alcuni di essi sono nulli, allora il sistema è:
- impossibile, se il corrispondente termine noto è diverso da zero.

- se il termine noto è 0, l'equazione diventa $0x_i = k_i = 0$, cioè indeterminata, e bisogna eliminare tutta la riga nulla, senza prenderla in considerazione, ottenendo così un nuovo sistema diagonale

Nel caso di piano colonne nulle, vanno eliminate e alla fine si aggiungono le soluzioni del sistema originale aggiungendo valori arbitrari per le incognite relative alle colonne eliminate

ESEMPIO ①

x_1	x_2	x_3	
③	0	0	7
0	②	0	13
0	0	④	19

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 7 \\ 2x_2 = 13 \\ 4x_3 = 19 \end{cases}$ unica soluzione determinato

ESEMPIO ②

x_1	x_2	x_3	
③	0	0	7
0	0	0	0
0	0	④	19

→

x_1	x_3	
③	0	7
0	0	0
0	④	19

→

x_1	x_3	
③	0	7
0	④	19

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 7 \\ x_2 = t \\ 4x = 19 \end{cases}$

$t \in \mathbb{R}$ indeterminato infinite soluzioni al variare di t

elimino la colonna di x_2 $\Rightarrow x_2 =$ arbitrario

elimino la 2, riga $\Rightarrow$ equazione non necessaria

Sistemi Triangolari

x_1	x_2	...	x_n	
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
②	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	...	⋮	⋮
ⓜ	ⓜ	...	a_{mn}	b_m

$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$a_{ii} \neq 0$ diagonale principale diversa da 0
$m = n$ numero di equazione = numero incognite (sist. quadr.)
$a_{ij} = 0 \ \forall i > j$ coefficienti sotto la diagonale principale $= 0$

(NB) andrebbe bene anche il contrario!!

Una equazione nella matrice dei coefficienti, in genere l'ultima, dipende solo da un'unica incognita, in questo caso x_n, che ha una e una sola soluzione se il coefficiente a_{mn} è non nullo; poiché $a_{mn} \neq 0$ si può risolvere l'ultima equazione e determinare l'incognita x_n; utilizziamo quindi il METODO di "SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO" per ricavare il valore delle restanti incognite, andando a sostituire non a mano i valori trovati nelle equazioni.

Il sistema si risolve ricorsivamente in n passi (n = numero incognite).

Come per i sistemi diagonali, per quelli triangolari è possibile risolvere via via le equazioni lineari di primo grado in una sola incognita, che si vengono a generare è legata al fatto che i termini diagonali aii siano non nulli; in tal caso ogni equazione ha una e una sola soluzione e il sistema è determinato.

Se qualcuno dei termini diagonali si annulla bisogna guardare se è sono equazioni impossibili o indeterminate o alcune da ometterle.

ESEMPIO ①

x_1	x_2	x_3		
①	2	1	1	
0	①	3	3	
0	0	②	1	

L'ultima equazione fornisce la soluzione unica $x_3 = 1/2$

Sostituiamo nelle equazioni precedenti ed eliminiamo l'ultima equazione

MASTER COPY

- Tel. 388/9837745

x_1	x_2	
①	2	$(1 - 1/2) = 1/2$
0	①	$(3 - 3/2) = 3/2$

L'ultima equazione da subito $x = 3/2$, sostituiamo nella prima equazione

x_1	
①	$(1/2 - 3) = -5/2$

otteniamo quindi il valore dell'ultima incognita $x = -5/2$

La soluzione unica risulta: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

ESEMPIO ② (introduzione algoritmo Gauss)

x_1	x_2	x_3	
1	2	3	1
0	1	0	3
0	1	1	3

Scrivendo il sistema con la notazione normale si nota subito come sia banale;

comunque, scambiamo la 2° riga con la 3°.

x_1	x_2	x_3	
1	2	3	1
0	1	1	3
0	1	0	3

Scambiamo la 2° colonna con la 3°

x_1	x_3	x_2	
①	3	2	1
0	①	1	3
0	0	①	3

Il sistema è ora triangolare

Dall'ultima riga otteniamo $x_2 = 3$

x_1	x_3	
①	3	$(1 - 6) = -5$
0	①	$(3 - 3) = 0$

Dall'ultima riga otteniamo $x_3 = 0$

x_1	
①	$(-5 - 0) = -5$

otteniamo $x_1 = -5$ quindi la soluzione unica è: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$